Prof. Dr. Manfred Lehn T. Weißschuh

5. Übung zur Vorlesung

Algebra I: Körper, Ringe, Moduln

im Wintersemester 2015/2016

Aufgabe 1 —

(a) Beschreibe die Sylowuntergruppen einer endlichen abelschen Gruppe. Wie viele p-Sylowuntergruppen gibt es? Was sind die Sylowuntergruppen von $\mathbb{Z}/20150$?

(b) Beschreibe die Sylowuntergruppen von S_4.

Aufgabe 2 — Zeige, dass alle Gruppen der Ordnung 18, 20, 28 und 42 auflösbar sind (ohne den (p, q)-Satz von Burnside zu verwenden).

Aufgabe 3 — Klassifiziere alle Gruppen der Ordnung 12, d.h. bestimme die auftretenden Gruppen (bis auf Isomorphie) und gib Modelle für jeden Isomorphietyp an.

Hinweis: Es bezeichne H_2 bzw. $H_3 \subset G$ eine 2- bzw. 3-Sylowuntergruppen von G. Dann ist nach Vorlesung H_2 oder H_3 ein Normalteiler in G und somit $G \cong H_2 \rtimes_\alpha H_3$ oder $G \cong H_3 \rtimes_\alpha H_2$. Welche Abbildungen α sind möglich?

Aufgabe 4 (Isomorphiesätze für Gruppen) — Betrachte eine Gruppe G, eine Untergruppe $H < G$ und einen Normalteiler $N \lhd G$. Zeige:

a) $HN := \{hn \mid h \in H, n \in N\}$ ist eine Untergruppe von G.

b) $H \cap N$ ist ein Normalteiler in H.

c) Die Abbildung

$$\begin{aligned} H/(H \cap N) &\to (HN)/N \\ h(H \cap H) &\mapsto hN \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und ein Gruppenisomorphismus.

Die obige Aussage heißt auch der *erste Isomorphiesatz für Gruppen.*
Für das Folgende sei nun auch H ein Normalteiler in G, und $H \subset N$. Dann ist auch $H \lhd N$.

d) Zeige, dass das Bild der Inklusion $N/H \hookrightarrow G/H$ ein Normalteiler ist.

e) Zeige, dass die offensichtliche Abbildung $G/H \to G/N$ surjektiv ist mit Kern N/H.

f) Folgere, dass man einen Gruppenisomorphismus

$$\left. {}^{\mathrm{G/H}} \middle/ {}_{\mathrm{N/H}} \right. \longrightarrow G/N$$

erhält.

Dies ist der *zweite Isomorphiesatz für Gruppen.*